Solution 16 :

1°/• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2}{2x+1} = 0$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x} = 0\times 1 = 0$

On a : $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{0} f = 0$ alors f est continue en 0

2°/a) $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{2} = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - \dfrac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x+1} - \dfrac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{4x+2} = \dfrac{-1}{4}$

D : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^-$: $f(x) - y = \dfrac{x^2}{2x+1} - \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{x^2}{2x+1} - \dfrac{2x-1}{4}$.

$$= \frac{4x^2 - (2x-1)(2x+1)}{4(2x+1)} = \frac{1}{4(2x+1)}$$

Pour $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$: $f(x) - y < 0$ donc Cf est e dessous de Δ

Pour $x \in \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$: Cf est au dessus de Δ

3°/Pour $x > 0$: $\quad -\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f = 0$

D : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$.